

## 什麼是微積分？

微積分的起源可追溯至 17 世紀，當時牛頓和萊布尼茲獨立地解決了以下兩個重要的問題：

**切線問題：**給定一個函數  $f$  和函數圖形  $y = f(x)$  上的一點  $P$ ，這個問題是要求一條和  $y = f(x)$  “局部分享恰於點  $P$ ” 的直線的方程式。這條線稱為  $y = f(x)$  在  $P$  點的切線。

**面積問題：**給定一個定義在  $[a, b]$  上的非負函數  $f$ ，這個問題是要計算在由函數圖形  $y = f(x)$ ， $x$  軸， $x = a$  以及  $x = b$  所圍出區域的面積。

這兩個問題的解答可以利用下述的方式逼近：對於切線問題，在函數圖形  $y = f(x)$  上選擇異於  $P$  點而非常接近  $P$  點的另一點  $Q$ ，然後計算通過  $P$  點和  $Q$  點的直線方程式(這很簡單)，這條線就會非常接近我們想要的切線；對於面積問題，可以在考慮的區域內接有限個長方形，當長方形的個數夠多時，這些長方形的面積和(這計算也不太困難)將會非常接近我們想要計算的面積。

現在，我們明確地知道要如何得到這兩個問題的解答：對於切線問題，讓  $Q$  愈來愈接近  $P$ ；對於面積問題，讓內接的長方形個數愈來愈多，直到能填滿這個區域。

這就是牛頓和萊布尼茲的成就，他們對於上述的問題給出精確的數學意義，進而解決了問題。他們的答案在數學的發展上有著巨大的衝擊。切線問題的解答導致了微分理論的發展；而面積問題導致了積分理論的發展。這兩個理論，和它們的延伸及應用被統稱為微積分。

更廣泛地說，微積分的發展可以被視為近代數學的發展起源。

## 如何學好微積分？

學數學絕不容易！歐幾里德的名言－「幾何學裡沒有王者之路」(There is no other Royal path which leads to geometry)，意即學習幾何學沒有捷徑，當然有關數學的所有領域，也必是如此。然而，倘若你能對學習數學，抱持著高度的興趣和熱情的心，相信很多困難將迎刃而解。以下提供一些關於如何學習微積分的具體建議。

**試著自己解題。**學數學唯一的好方法是由「做」中學。由於解題時，你必須把學過的理論再重新思考過一次，這個過程會讓你學到如何從不同的角度來看這些理論，也會幫助你發現先前所忽略的東西。所以，盡可能多試著先由自己來解題。

**解複雜習題時和其他同學一起努力。**在十七、十八世紀時的數學家，他們的研究多半是單打獨鬥的成果；反觀今日，有蠻大比例的研究是靠團隊合作而產生的結果，團隊合作的好處是讓思考能夠更加周全。當你遇到複雜的習題無法自己算出答案時，建議你可和其他同學一起討論，一群人的腦力激盪可能會促使你想出自己一個人孤軍奮鬥時所沒有辦法想到的點子。

**和其他同學或老師一起討論課程內容。**每個人都有自己習慣的看事情方式，往往一不小心就會落入盲點而不自知。所以，即便你認為你已經了解課程內容，建議你還是應該多和其他同學或是老師共同討論；這樣一來，你才能察覺你忽略的小細節，或者一些你根本沒有考慮到的層面。

**課堂上要勇於發問。**上課時，如果你有任何疑問，應該立即發問。因為你的問題，有可能正好就是其他同學不敢問的問題；也有可能是在坐所有的人(包括老師)都還沒考慮到的問題。課堂上發問，不僅能對自己也是對全班同學的莫大幫助。一個活潑生動的學習環境，不單是只靠老師來營造，也需要同學們的參與，老師們都很希望也很重視同學們在課堂上能夠有更主動的表現。相信這樣互動的學習過程，一定能讓你在學習微積分上有更多的收穫。

## 爲什麼要學微積分？

或許你對微積分不是那麼有興趣，或許你來這裡，是想學一些跟微積分無直接相關的知識，關於學習微積分，你的心中一定有很多疑惑。但是，問「爲什麼要學微積分？」，其實就好像問「爲什麼要學數學？」是一樣的意思。怎麼說呢？因爲微積分是現代數學的發展起點，主修科學相關領域的學生就必須打好這個數學基礎，我用下面兩個主要的理由來說明。

**數學是科學的語言！**想想看，如果你到了一個陌生的國家卻不會說當地的語言。當然，你可以完全不學或只學你需要用到的幾個字就能舒服地在那裡生活好幾年。可是，這樣會限制你的生活，限制你對所處環境的了解，當然也會限制你的自我發展。在你不用心去學習當地語言前，你將永遠無法一窺這個環境的全貌，許多應該屬於你的機會可能在你渾然不知的狀況下悄悄溜走。科學的學習狀況和這個例子很類似，或許你可以只學習一小部分的數學，就能滿足獲得某個領域知識的需求；但是沒有好好學數學，你所獲得部分還是有所侷限的，因爲你將無法了解更廣更深的部份。書到用時方恨少，數學亦然！

**數學訓練邏輯思考！**這點十分重要。邏輯思考的能力不管它是不是與生俱有的，但很確定的一點是，它是可以被訓練的，方法之一就是透過學習數學。數學解題會教你如何接近問題、學到如何抽絲剝繭地看出問題的關鍵、問出適切的問題、從不同的角度來思考問題等等。邏輯思考的能力比數學有用太多，例如它對學新的語言、組織與計畫等也很有幫助。

總而言之，每位學生都應該而且可以為微積分找到學習動機。你不必認同「微積分是人類最偉大的成就之一，這個理論之美讓人目眩神迷」。但至少把微積分看作是掌握學科的重要工具，而且是教你學習如何有系統地進攻與解決問題的重要理論。